BẤT PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. TÓM TẮT MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP THƯỜNG GẶP

- Để giải một bất phương trình lượng giác, ta thường dùng hai phương pháp sau :

1. **Phương pháp 1 :** Đưa bất phương trình về các dạng cơ bản như : $\cos x \geq a; \sin x \leq a; \tan x \geq a; \cot x \leq a$ ... Thông thường ta dùng đường tròn lượng giác để tìm các họ nghiệm tương ứng.
2. **Phương pháp 2 :** Viết bất phương trình về tích hoặc thương các hàm số lượng giác dạng cơ bản. Xét dấu các thừa số từ đó chọn nghiệm thích hợp.

CÁC BẤT PHƯƠNG TRÌNH CẦN NẮM

- $\cos x \geq a$
  - Nếu $a > 1$, bất phương trình vô nghiệm.
  - Nếu $a = 1$, bất phương trình có nghiệm là :

$$x = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

  - Nếu $-1 < a < 1$, bất phương trình có nghiệm là :

$$-\arccos a + k2\pi \leq x \leq \arccos a + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

  - Nếu $a \leq -1$, bất phương trình có vô số nghiệm.
- $\sin x \geq a$
  - Nếu $a > 1$, bất phương trình vô nghiệm.
  - Nếu $a = 1$, bất phương trình có nghiệm là :

$$x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

  - Nếu $-1 < a < 1$, bất phương trình có nghiệm là :

$$-\arcsin a + k2\pi \leq x \leq \arcsin a + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

  - Nếu $a \leq -1$, bất phương trình có vô số nghiệm.

- $\tan x \geq a$ có nghiệm là :

$$\arctan a + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

- $\cot x \geq a$ có nghiệm là :

$$k\pi < a \leq \operatorname{arccot} a + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

II. CÁC BÀI TẬP MINH HỌA

Bài 1: Giải bất phương trình sau :

$$\frac{\sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x - 1} > 0$$

Giải: Bất phương trình tương đương với

$$(\sin x - \cos x + 1)(\sin x + \cos x - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - (1 - \cos x)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos^2 x - (1 - 2\cos x + \cos^2 x) > 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 2\cos x < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < \cos x < 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \neq k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 2: Giải bất phương trình sau :

$$5 + 2\cos 2x \leq 3|2\sin x - 1|$$

Giải: Ta đặt : $t = \sin x, t \in [-1; 1]$

Bất phương trình tương đương với

$$5 + 2(1 - 2t^2) \leq 3|2t - 1|$$

$$\Leftrightarrow 7 - 4t^2 \leq 3|2t - 1|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 7-4t^2 \leq 6t-3 \\ t \geq \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} 7-4t^2 \leq 3-6t \\ t \leq \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t \geq 1 \\ t \leq -\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \\ t \geq \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t \geq 2 \\ t \leq -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ t \leq \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t \leq -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x \leq -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \leq x \leq \dfrac{11\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

<u>Bài 3:</u> Giải bất phương trình sau :

$$\cot x - \tan x - 2\tan 2x - 4\tan 4x < \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

<u>Giải:</u> Điều kiện :

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \\ \cos 4x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 8x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{l\pi}{8} \ (l \in \mathbb{Z}) \ (*)$$

Bất phương trình tương đương với

$$2\cot 2x - 2\tan 2x - 4\tan 4x < \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2(\cot 2x - \tan 2x) - 4\tan 4x < \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 4(\cot 4x - \tan 4x) < \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \cot 8x < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + k\pi < 8x < \pi + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{8} < x < \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{8} \ (k \in \mathbb{Z}) \ \left(\text{thỏa } (*)\right)$$

Bài 4: Giải bất phương trình sau :

$$\cot x - \tan x - 2\tan 2x - 4\tan 4x - 8\tan 8x \geq 16\sqrt{3}$$

Giải: Điều kiện :

$$\sin 16x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{l\pi}{16} \ (l \in \mathbb{Z}) \ (*)$$

Bất phương trình tương đương với

$$\frac{1 - \tan^2 x}{\tan x} - 2\tan 2x - 4\tan 4x - 8\tan 8x \geq 16\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{\tan 2x} - \tan 2x\right) - 4\tan 4x - 8\tan 8x \geq 16\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{\tan 4x} - \tan 4x\right) - 8\tan 8x \geq 16\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 8\left(\frac{1}{\tan 8x} - \tan 8x\right) \geq 16\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \cot 16x \geq \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow k\pi < x \le \frac{\pi}{96} + \frac{k\pi}{6}\ (k \in \mathbb{Z})\ \big(\text{thỏa } (*)\big)$$

Bài 5: Giải bất phương trình sau :

$$\frac{\sin 3x + \cos 3x}{1 + 2\sin 2x} \le 1$$

Giải: Điều kiện :

$$\left[\begin{array}{l} x \ne \frac{7\pi}{12} + l\pi \\ x \ne -\frac{\pi}{12} + l\pi \end{array}\right. \ (l \in \mathbb{Z})\ (*)$$

Bất phương trình tương đương với

$$\frac{3(\sin x - \cos x) - 4(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x)}{1 + 2\sin 2x} \le 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sin x - \cos x)\left[3 - 4\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]}{1 + 2\sin 2x} \le 1$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin x \le 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow k2\pi \le x \le \frac{3\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$ ta có nghiệm của bất phương trình là

$$\begin{cases} k2\pi \le x \le \frac{3\pi}{2} + k2\pi \\ x \ne \frac{7\pi}{12} + l\pi \\ x \ne -\frac{\pi}{12} + l\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Bài 6: Giải bất phương trình sau :

$$2\cot x - \tan x \le \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\cot 2x$$

Giải: Điều kiện :

$$\sin 2x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{l\pi}{2}\ (l \in \mathbb{Z})\ (*)$$

Bất phương trình tương đương với

$$\cot x + (\cot x - \tan x) \le \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\cot 2x$$

$$\Leftrightarrow \cot x + 2\cot 2x \le \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\cot 2x$$

$$\Leftrightarrow \cot x \le \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + k\pi \le x < \pi + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$ ta có nghiệm của bất phương trình là

$$\frac{\pi}{3} + k\pi \le x < \pi + k\pi\ (k \ne 4l + 1; l \in \mathbb{Z})$$

Bài 7: Tìm nghiệm của bất phương trình

$$\sqrt{3}\cos^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x \ge \sqrt{3}\ (1)$$

Thỏa mãn bất phương trình $\log(x^2 + x + 4) < 1\ (2)$

Giải: Bất phương trình (1) tương đương với

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \cos 2x) + \frac{1}{2}\sin 2x \ge \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x \ge \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Bất phương trình (2) tương đương với

$$x^2 + x - 6 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 2$$

Do đó, nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$$

Bài 8: Giải bất phương trình sau :

$$2\cos 2x + \sin 2x \leq \tan x$$

Giải: Điều kiện :

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \ (l \in \mathbb{Z}) \ (*)$$

Đặt $= \tan x$, $t \in \mathbb{R}$. Khi đó, bất phương trình tương đương với

$$2.\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + \frac{2t}{1 + t^2} \leq t$$

$$\Leftrightarrow t^3 + 2t^2 - t - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \geq 1 \\ -2 \leq t \leq -1 \end{array}\right.$$

Với $-2 \leq t \leq -1$ thì

$$-\alpha + k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}; \tan\alpha = 2)$$

Với $t \geq 1$ thì

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện $(*)$, ta nhận 2 nghiệm trên là nghiệm của bất phương trình.

Bài 9: Giải bất phương trình sau :

$$2\cos 2x + \sin^2 x\cos x + \sin x\cos^2 x > 2(\sin x + \cos x)$$

(ĐH Kinh Tế Tp.HCM 1997)

Giải: Bất phương trình tương đương với

$$(\sin x + \cos x)[2(\cos x - \sin x) + \sin x\cos x - 2] > 0$$

Đặt $f(x) = (\sin x + \cos x)[2(\cos x - \sin x) + \sin x\cos x - 2]$

Do hàm số tuần hoàn có chu kỳ 2π nên ta chỉ cần xét dấu của $f(x)$ trên $[0; 2\pi]$.

Ta có :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \sin x + \cos x = 0\ (1) \\ 2(\cos x - \sin x) + \sin x\cos x - 2 = 0\ (2) \end{array}\right.$$

Với (1) :

$$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{7\pi}{4} \\ x = \frac{3\pi}{4} \end{array}\right.$$

Với (2), ta đặt $t = \cos x - \sin x$, $|t| \leq \sqrt{2}$:

$$2t + \frac{1 - t^2}{2} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} t = 1 \\ t = 3\ (\text{loại}) \end{array}\right.$$

Suy ra

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{3\pi}{2} \end{array}\right.$$

Lập bảng xét dấu của $f(x)$ trên $[0; 2\pi]$ ta thấy

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$f(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0

Như vậy, ta có trong 1 chu kỳ nghiệm của bất phương trình là

$$\left[\begin{array}{l}\frac{3\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}\\ \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\end{array}\right.$$

Do đó, nghiệm của bất phương trình là

$$\left[\begin{array}{l}\frac{3\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{3\pi}{2} + k2\pi\\ \frac{7\pi}{4} + k2\pi < x < 2\pi + k2\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 10: Giải bất phương trình sau :

$$\sin 2x + \sin 4x > \sin x + \sin 3x +$$

Giải: Đặt $f(x) = -\sin x - \sin 3x + \sin 2x + \sin 4x$

Do hàm số tuần hoàn có chu kỳ 2π nên ta chỉ cần xét dấu của $f(x)$ trên $[0; 2\pi]$.

Ta có, bất phương trình tương đương với

$$2\sin 3x \cos x - 2\sin 2x \cos x > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x \cos\frac{5x}{2} \sin\frac{x}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x \cos\frac{5x}{2} > 0\\ 0 < x < 2\pi\end{cases}$$

Lập bảng xét dấu trên $[0; 2\pi]$ ta thấy

x	0		$\frac{\pi}{5}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{5}$		π		$\frac{7\pi}{5}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{9\pi}{5}$		2π
$\cos x$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\cos\frac{5x}{2}$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$\cos x\cos\frac{5x}{2}$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra nghiệm của bất phương trình là

$$\left[\begin{array}{l} k2\pi < x < \frac{\pi}{5} + k2\pi \\ \frac{\pi}{2} + k2\pi < x < \frac{3\pi}{2} + k2\pi \\ \pi + k2\pi < x < \frac{7\pi}{5} + k2\pi \\ \frac{3\pi}{2} + k2\pi < x < \frac{9\pi}{5} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 11: Giải bất phương trình sau :

$$3\sqrt{\tan x + 1}.\frac{\sin x + 2\cos x}{\sin x + 3\cos x} \leq 2^{1-\sqrt{\tan x}}$$

Giải: Điều kiện :

$$\begin{cases} \tan x \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} (*)$$

Bất phương trình tương đương với

$$3\sqrt{\tan x + 1}.\frac{\tan x + 2}{\tan x + 3} \leq 2^{1-\sqrt{\tan x}}$$

Đặt $t = \tan x\,, t \geq 0$, ta đưa bất phương trình trở thành

$$3\sqrt{t + 1}.\frac{t + 2}{t + 3} \leq 2^{1-\sqrt{t}}$$

Ta xét hàm số

$$f(t) = 3\sqrt{t + 1}.\frac{t + 2}{t + 3}\,, t \geq 0$$

$$f'(t) = 3\left[\frac{1}{2\sqrt{t+1}}.\frac{t+2}{t+3} + \sqrt{t+1}.\frac{1}{(t+3)^2}\right] > 0$$

Do đó, $f(t)$ đồng biến trên $[0, \infty)$

Ta xét thêm hàm số

$$g(t) = 2^{1-\sqrt{t}}, t \geq 0$$

$$g'(t) = -2^{1-\sqrt{t}}.\frac{1}{2\sqrt{t}} < 0$$

Do đó, $g(t)$ nghịch biến trên $[0, \infty)$

Suy ra với mọi $t \in [0, \infty)$

$$\begin{cases} f(t) \geq f(0) = 2 \\ g(t) \leq g(0) = 2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f(t) \geq 2 \geq g(t), \forall t \in [0, \infty)$$

Như vậy, ta có :

$$f(t) = g(t) = 2 \Leftrightarrow t = 0$$

Khi đó,

$$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \ \big(\text{thỏa } (*)\big)$$

Bài 12: Giải bất phương trình sau :

$$7\sqrt{\tan x}\,(\sin^2 x + 3\cos^2 x) \leq 6\sqrt[4]{3}(\sin^2 x + 4\cos^2 x)$$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2006)

Giải: Điều kiện :

$$\begin{cases} \tan x \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} (*)$$

Bất phương trình tương đương với

$$7\sqrt{\tan x}\,.\frac{\tan^2 x + 3}{\tan^2 x + 4} \leq 6\sqrt[4]{3}$$

Đặt $t = \tan x, t \geq 0$. Ta đưa bất phương trình trở thành

$$7\sqrt{t}.\frac{t^2+3}{t^2+4} \leq 6\sqrt[4]{3}$$

Ta xét hàm số

$$f(t) = 7\sqrt{t}.\frac{t^2+3}{t^2+4}, t \geq 0$$

$$f'(t) = 7\left[\frac{1}{2\sqrt{t}}.\frac{t^2+3}{t^2+4} + \sqrt{t}.\frac{2t}{(t^2+4)^2}\right] > 0$$

Do đó, $f(t)$ đồng biến trên $[0, \infty)$.

Suy ra :

$$f(t) \leq 6\sqrt[4]{3} \Leftrightarrow t \leq \sqrt{3}$$

Như vậy,

$$0 \leq \tan x \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \left(\text{thỏa } (*)\right)$$

- **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

7.1.1. Giải các bất phương trình sau :

a. $\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x < 1$

b. $\sin(\cos x) \leq \frac{1}{2}$

c. $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} > 0$

7.1.2. Giải các bất phương trình sau :

a. $\sin 3x + \sin x < \sin 2x$

b. $\sin^3 x \sin 3x - \cos^3 x \cos 3x \leq \frac{1}{2}$

c. $\cos x + \frac{1}{\cos x} \geq \frac{5}{2}$

7.1.3. Giải các bất phương trình sau :

a. $\sqrt{3}\cot x - \tan x > \sqrt{3} - 1$

b. $2\tan x + \cot x \geq \sqrt{3} + \dfrac{2}{\sin 2x}$

c. $\dfrac{2\cos x - 1}{\cos 2x + \cos x} \geq 2$

7.1.4. Giải các bất phương trình sau :

a. $\cos x - \sin x - \cos 2x > 0$

b. $\cos x + \cos 2x \geq \cos 3x + 1$

c. $\dfrac{\tan x - \sin x}{\tan x + \sin x} \leq \sqrt{3}\tan\dfrac{x}{2}$

- GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

7.1.1. Nghiệm của bất phương trình là :

a. $\dfrac{\pi}{3} + k\pi < x < \pi + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

b. $\alpha + k2\pi \leq x \leq 2\pi - \alpha + k2\pi$, $\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\cos\alpha = \dfrac{\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$

c. $\dfrac{\pi}{2} + k\pi < x < \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

7.1.2. Nghiệm của bất phương trình là :

a. $\left[\begin{array}{l} \pi + k2\pi < x < \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi \\ \dfrac{\pi}{3} + k2\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi < x < k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

b. Vô số nghiệm

c. $\left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2} + k2\pi < x \leq \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi < x \leq \dfrac{5\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

7.1.3. Nghiệm của bất phương trình là :

a. $\left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2}+k\pi < x < -\frac{\pi}{3}+k\pi \\ k\pi < x < \frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

b. $\frac{\pi}{3}+k\pi \leq x < \frac{\pi}{2}+k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

c. $\frac{2\pi}{3}+k2\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3}+k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

7.1.4. Nghiệm của bất phương trình là :

a. $\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4}+k2\pi < x < \frac{\pi}{2}+k2\pi \\ \frac{5\pi}{4}+k2\pi < x < 2\pi+k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

b. $\left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ -\frac{\pi}{3}+k2\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

c. $\begin{cases} k2\pi < x \leq \frac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x \neq \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$